Wavelet

> Analyzing the time-frequency lead–lag relationship between oil and agricultural commodities -wavelet

> FEATURE EXTRACTION BASED ON MORLET WAVELET
> AND ITS APPLICATION FOR MECHANICAL FAULT
> DIAGNOSIS ⇒ wavelet공식 이해

Morlet WAVELET Coherence Analysis

요약

- 시간 국지화(time-localized) 정보를 보존하면서도 주파수 정보까지 제공하여, 시간 국지화 정보를 소실하는 푸리에(Fourier) 기반 접근 방식의 한계를 극복합니다.
- 언제 발생했는지와 영향력은 어디까지 미치는지를 알려줍니다.

1. **mother wavelet**

$$\psi(t) = \underbrace{\pi^{-1/4}}_{\text{정규화 상수}} \underbrace{e^{i\omega_0 t}}_{\text{진동 성분}} \underbrace{e^{-t^2/2}}_{\text{가우시안 창}}$$

$$e^{i\omega_0 t} = \underbrace{\cos(\omega_0 t)}_{\text{실수부}} + \underbrace{i\sin(\omega_0 t)}_{\text{허수부}}$$

실수부⇒모양(크기) , 허수부⇒위상(Angle, 타이밍,순서) ⇒즉, 그래프가 올라가나 내려가나 알려줌.

- [x] ~~w0는 보통 6을 넣는다.~~

2. **son wavelet (mother wavelet를 팽창 및 변환)**

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\underbrace{e^{i\omega_0\left(\frac{t-b}{a}\right)}e^{-\frac{\left(\frac{t-b}{a}\right)^2}{2}}}$$

(a:scale factor (양옆으로 늘어남),   b: time location(그래프의 x좌표 이동))

3. **wavelet 변환값 *(x(t)는 원본 데이터 ⇒z-score적용)***

참고⇒$zscore = x - \frac{평균}{표준편차}$

$$W(a,b) = \langle \psi_{a,b}(t), x(t) \rangle = |a|^{-1/2} \int x(t)\psi^*_{a,b}(t)dt.$$

4.1 wavelet 허용조건

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$$

4.2 mother wavelet에 푸리에 변환 적용

$$\hat{\psi}(\omega) = \int \psi(t) \exp(-j\omega t)\, dt.$$

5. **cross wavelet transformation (두 표본의 상관관계)**
   ⇒값이 0에 가까울수록 더 약한 상관 관계, 1에 가까울수록 더 강한 상관 관계를 나타냄

$$W_{\mathrm{k,l}}(a,b) = W_{\mathrm{k}}(a,b)W^*_{\mathrm{l}}(a,b)$$

5. R^2

$$R^2_{Agri,Oil}(a,b) = \frac{\left|S(b^{-1}W_{Agri,Oil}(a,b))\right|^2}{S(b^{-1}|W_{Agri}(a,b)|^2)S(b^{-1}|W_{Oil}(a,b)|^2)}$$

S:시간과 스케일 모두에서 컨볼루션에 의해 달성되는 Smoothing parameter

1. 숨겨진 패턴을 찾는 열쇠: 특징 추출 (Feature Discovery)

- 웨이블릿 분석의 가장 큰 매력은 신호 속에 숨어 있는 **'특징(Feature)'** 을 찾아내는 능력입니다. 앞서 설명한 **내적(Inner Product)** 의 원리에 따라, 우리가 사용하는 웨이블릿(탐지 도구)의 모양이 신호 속에 숨겨진 패턴과 **닮아 있을수록**, 그 특징은 더욱 선명하게 드러납니다.

2. 컴퓨터를 위한 타협: 이산화 (Discretization)

- 하지만 이론적으로 완벽한 '연속' 웨이블릿 변환(CWT)을 컴퓨터로 계산하기 위해서는, 연속적인 시간을 뚝뚝 끊어서 숫자로 만드는 **이산화(Discretization)** 과정이 필수적입니다.

- 이때 가장 대중적이고 빠른 방법은 **이진 이산화(Dyadic Discretization)** 입니다. 이는 스케일*(a)*과 위치*(b)*를 2의 거듭제곱*(2^j)* 단위로 듬성듬성 나누는 방식인데, **Mallat 알고리즘**과 같은 고속 연산이 가능하여 계산 시간을 획기적으로 줄여줍니다. 이를 보통 **이산 웨이블릿 변환(DWT)** 이라고 부릅니다.

3. 빠르지만 놓치는 것들: DWT의 한계

하지만 이 논문에서는 빠른 길(DWT) 대신, 조금 느리더라도 꼼꼼한 길(CWT)을 택했습니다. 그 이유는 **특징 추출(Feature Extraction)** 관점에서 DWT가 가진 치명적인 세 가지 단점 때문입니다.

- 첫째, 직교성(Orthogonality)의 제약:

  DWT를 쓰려면 웨이블릿이 서로 직교(orthogonal)해야 한다는 까다로운 수학적 조건이 붙습니다. 이 조건을 맞추다 보면, 정작 우리가 찾고자 하는 신호의 특징과 '모양'이 딱 맞는 적절한 웨이블릿을 찾기가 매우 어려워집니다. (선형대수학에서 기저 벡터를 고를 때 직교성만 고집하다가 표현력을 잃는 것과 비슷합니다.)

- 둘째, 성긴 격자(Sparse Grids):
  시간과 스케일을 2배수로 듬성듬성 건너뛰며 분석하다 보니, 그 '사이사이' 에 존재하는 미세한 특징들을 놓칠 위험이 큽니다. 마치 그물이 너무 넓어서 작은 물고기(중요한 신호)가 빠져나가는 것과 같습니다.

- 셋째, 시간 불변성(Time Invariance)의 부재:
  특징 탐지에서 가장 중요한 것은 신호가 조금 옆으로 이동해도 결과가 일정해야 한다는 것(Time Invariance)입니다. 하지만 DWT는 신호 시작점이 아주 조금만 달라져도 분석 결과가 완전히 달라질 수 있습니다. 이는 패턴 인식에 있어 치명적인 약점입니다.

⇒결론: 그래서 우리는 CWT를 씁니다.
이러한 이유로, 본 연구에서는 계산 비용이 조금 더 들더라도 **연속 웨이블릿 변환(CWT)**을 채택했습니다. 이는 앞서 소개한 **Morlet 웨이블릿**과 결합하여, 경제 데이터 속에 숨겨진 미세한 동조화 흐름을 놓치지 않고 포착하기 위한 최선의 선택이었습니다.

—>이론적인 CWT임. 왜냐? 어차피 data를 컴퓨터에 저장하기 위해서는 이산적으로 저장해야되기 때문. 즉, 지금 말하는건 아주 촘촘한 계단을 만드는거와 다름없음

WAVELET 변형

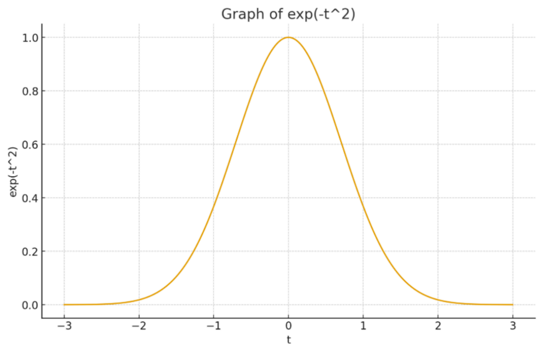
"FEATURE EXTRACTION BASED ON.......”논문에서는 **wavelet을 변형**

(허수부를 삭제하고 cos를 붙여서 사용 ⇒ 즉, 모양(크기)만을 분석합니다.)

$$\psi(t) = \exp\left(-\beta^2 t^2/2\right)\cos(\pi t).$$

$$\exp\left(-t^2\right) < 0 \text{범위에서} \beta^2$$

$\exp\left(-t^2\right) < 0$ 범위에서 β^2, 즉, β가 클 수록 $\psi(t)$는 뾰족해짐.



상수 *cos그래프

$$\psi_{a,b}(t) = \exp\left[-\frac{\beta^2(t-b)^2}{a^2}\right]\cos\left[\frac{\pi(t-b)}{a}\right]$$

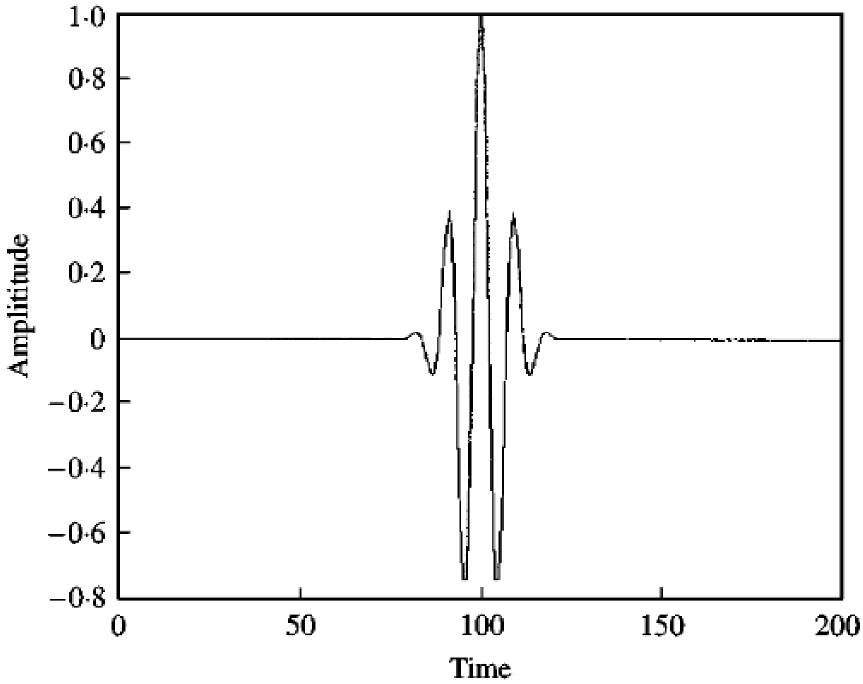


Figure 1. The shape of Morlet wavelet.

컸던 지수는 b가 커짐에 따라 점점 작아짐. 즉, exp는 0으로 수렴하게된다.

thinking

💡 **THINKING**

$\psi_{a,b}(t) = \exp\left[-\frac{\beta^2(t-b)^2}{a^2}\right]\cos\left[\frac{\pi(t-b)}{a}\right]$**에서**

- a:scale factor가 크다의 의미
  ⇒exp부분은 감소, cos는 주기가 늦게 돈다.
  ⇒즉, 길고 낮은 파형
- 반대로 a가 작다의 의미
  ⇒exp 부분 증가, cos 주기 짧음.